Wurzeln

- Eine Zahl mit sich selbst multiplizieren, nennt man quadrieren, z.B. $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$.
- 4^2 nennt man Potenz. 4 ist die Basis, 2 der Exponent. (Hochzahl)
- Die Umkehrrechnung zum Quadrieren ist das Wurzelziehen, z.B. $\sqrt{16} = 4$, weil $4^2 = 16$ (s.o.).
- $\sqrt{}$ ist das Wurzelzeichen. Das, was unter der Wurzel steht, nennt man Radikand, z.B. $\sqrt{3x}$ (3x ist der R.).
- Es gilt also: $(\sqrt{16})^2 = 16$ (Wurzelziehen und Quadrieren hebt sich gegenseitig auf)
- Gegenteilrechnungen: $+ \leftrightarrow -$ $\cdot \leftrightarrow :$ $x^2 \leftrightarrow \sqrt{x}$
- Wurzeln aus Quadratzahlen sind leicht zu berechnen. Ihre Ergebnisse liegen in $\mathbb{N}$, z.B.

  $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{256} = 16$

  Tipp: Daher ist es sinnvoll, die Quadratzahlen auswendig zu lernen, von $0^2 = 0$ bis $20^2 = 400$.
- In anderen Fällen liegen die Ergebnisse häufig in $\mathbb{I}$, z.B. $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356\ldots$ (unendlich, ohne Periode)

- Def.: Mit $\sqrt{a}$ wird diejenige nicht negative (!) Zahl bezeichnet, deren Quadrat a ergibt.
- Der Wert einer Quadratwurzel ist stets nicht negativ. Aus negativen Zahlen kann man keine Quadratwurzel ziehen.
- Anstatt „Quadratwurzel" sagt man auch kurz „Wurzel".
- $\sqrt{36}$ bedeutet also: Welche nicht negative Zahl mit sich selbst multipliziert ergibt 36?

  $\sqrt{36} = 6$, aber $\sqrt{36} \neq -6$!

- Wichtige Wurzeln sind u.a.:

  $\sqrt{0} = 0$, weil $0^2 = 0$ $\qquad$ $\sqrt{1} = 1$, weil $1^2 = 1$

  $\sqrt{2} \approx 1{,}414\ldots$

- Doppelwurzel: Diese berechnet man wie geschachtelte Klammern schrittweise von innen nach außen:

  $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$ $\qquad$ blau: äußere Wurzel

  grün: innere Wurzel

- Vorsicht bei Gleichungen:

$\sqrt{4} = 2$ (und nur +2, s.o.), aber bei <u>Gleichungen</u> mit x kommt für die Lösung das negative Ergebnis hinzu:

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$ (!!) $\qquad \mathbb{L} = \{-2; 2\}$

- Wurzeln und Zehnerpotenzen (also $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \ldots$)

$100^2 = 100 \cdot 100 = 10.000$ (Anzahl der Nullen wird zusammengeschrieben (2+2=4 Nullen))

$\sqrt{10.000} = 100$ („schön rundes Ergebnis")

aber:

$\sqrt{1.000} \approx 31{,}6227$ („kein schön rundes Ergebnis")

Woran liegt das? 10.000 hat eine gerade Anzahl von Nullen. Bei diesen Zehnerpotenzen ist das Wurzelziehen immer einfach, da als Ergebnis wieder eine Zehnerpotenz resultiert. Bei ungerader Nullenanzahl folgt ein Ergebnis aus $\mathbb{I}$.

• $\sqrt{10^6} = 10^3$, weil $\sqrt{10^6} = \sqrt{1.000.000} = 1.000 = 10^3$

$\sqrt{10^4} = 10^2$, weil $\sqrt{10^4} = \sqrt{10.000} = 100 = 10^2$

usw. (Beachte den Zusammenhang beim Exponenten!)

• Weitere Beispielrechnungen:

$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

$(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$ (!!) Es gilt: $\boxed{(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x}$

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{(-5) \cdot (-5)} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{-5} =$ ↯ weil die Umkehrrechnung nicht funktionieren würde: Keine Zahl mit sich selbst multipliziert kann −5 ergeben (vgl. Definition oben)

Bedenke: − · − ergibt + !

$(\sqrt{25})^2 = \sqrt{25} \cdot \sqrt{25} = 25$

oder:

$= (5)^2 = 5^2 = 25$

$\sqrt{\frac{49}{121}} = \frac{7}{11}$, weil $\frac{7}{11} \cdot \frac{7}{11} = \frac{49}{121}$

$-\sqrt{0,64} = -0,8$ funktioniert, weil mit +0,64 ja <u>keine</u> Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen wird!

- Anstelle $\sqrt{x} + a$ schreibt man $a + \sqrt{x}$, anstelle $\sqrt{x}\,a$ schreibt man $a\sqrt{x}$, damit nicht versehentlich etwas unter die Wurzel „rutscht".