Bsp.-Erläuterung zu S. 171: Rechnerisches Lösen quadr. Gleichungen (Herleitung der pq-Formel)

1. Herkömmliches Lösen mit quadr. Ergänzung:

⇒ daraus:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \quad | -6$$
$$x^2 + 5x = -6 \quad | \text{qE.: } \left(\tfrac{5}{2}\right)^2$$
$$x^2 + 5x + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 = -6 + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 \quad | \ T$$
$$\left(x + \tfrac{5}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} \quad | \sqrt{\ }$$
$$x + \tfrac{5}{2} = \pm\tfrac{1}{2} \quad | -\tfrac{5}{2}$$
$$x_1 = -\tfrac{4}{2} = \underline{\underline{-2}}$$
$$x_2 = -\tfrac{6}{2} = \underline{\underline{-3}}$$

→ So würde man wohl die quadr. Gleichung herkömmlich („normal") lösen mit quadratischer Ergänzung.

2. Formalisiertere Lösung

⇒ daraus:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \quad | -6$$
$$x^2 + 5x = -6 \quad | \text{qE.: } \left(\tfrac{5}{2}\right)^2$$
$$x^2 + 5x + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 - 6 \quad | \ T$$
$$\left(x + \tfrac{5}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 - 6 \quad | \sqrt{\ }$$
$$x + \tfrac{5}{2} = \pm\sqrt{\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 - 6} \quad | -\tfrac{5}{2}$$
$$x_1 = -\tfrac{5}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 - 6}$$
$$x_2 = -\tfrac{5}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 - 6}$$

→ mit Absicht nicht weiter verrechnet, damit man den Aufbau der daraus abgeleiteten Formel (s. 3.) besser erkennen kann.

3. Aus Schreibweise in 2. verallgemeinerte Lösung:

$$x^2 + px + q = 0 \quad | -q$$
$$x^2 + px = -q \quad | \text{qE: } \left(\tfrac{p}{2}\right)^2$$
$$x^2 + px + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q \quad | \ T$$
$$\left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q \quad | \sqrt{\ }$$
$$x + \tfrac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | -\tfrac{p}{2}$$
$$x_1 = -\tfrac{p}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$x_2 = -\tfrac{p}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}$$

→ damit kann man eine allgemeine Lösungsformel angeben für quadr. Gleichungen, die der Normalform $x^2 + px + q = 0$ entsprechen, nämlich die pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wichtig: p und q identifizieren!

Den Radikand (= Term unter der Wurzel) wird hier Diskriminante (D) genannt. Es gilt: $D > 0 \rightarrow$ 2 Lsg.en; $D = 0 \rightarrow$ 1 Lsg.; $D < 0 \rightarrow$ keine Lsg.!

M. Zirbes