Quadratische Funktionen: Fallunterscheidung zur Nullstellenberechnung

Zum Lösen quadratischer Funktionen (Nullstellenberechnung, y = 0 setzen) funktioniert die pq-Formel immer – ist aber mitunter aufwändig / umständlich. Je nachdem, in welcher Form eine quadratische Funktion gegeben ist, gibt es alternative / schnellere Lösungswege.

Fall	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$	$a(x - d)^2 + e = 0$	$a(x - d)(x - e) = 0$
Beschreibung	allgemeine Form, ohne lineares Glied bx	allgemeine Form, ohne absolutes Glied c	allgemeine Form, alle Glieder gegeben	Scheitelform	Linearfaktoren
Verfahren	**Auflösen** (Wurzel ziehen)	**Ausklammern, Faktoren einzeln mit 0 gleichsetzen**	**pq-Formel** (alternativ: abc-Formel)	**Auflösen** (Wurzel ziehen)	**Faktoren einzeln mit 0 gleichsetzen**
	$ax^2 + c = 0 \quad \mid -c$ $ax^2 = -c \quad \mid :a$ $x^2 = -\frac{c}{a} \quad \mid \sqrt{\ }$ $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2 + bx = 0 \quad \mid$ x ausklam. $x \cdot (ax + b) = 0$ $x_1 = 0$ $ax + b = 0 \quad \mid -b$ $ax = -b \quad \mid :a$ $x_2 = -\frac{b}{a}$	$ax^2 + bx + c = 0 \quad \mid :a$ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ das entspricht: $x^2 + px + q = 0$ mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ … (pq-Formel lösen) (abc-Formel hier ausgelassen)	$a(x - d)^2 + e = 0 \quad \mid -e$ $a(x - d)^2 = -e \quad \mid :a$ $(x - d)^2 = -\frac{e}{a} \quad \mid \sqrt{\ }$ $x_1 - d = \sqrt{-\frac{e}{a}} \quad \mid +d$ $x_1 = \sqrt{-\frac{e}{a}} + d$ $x_2 - d = -\sqrt{-\frac{e}{a}} \quad \mid +d$ $x_2 = -\sqrt{-\frac{e}{a}} + d$	$a(x - d)(x - e) = 0$ $x - d = 0 \quad \mid +d$ $x_1 = d$ $(x - e) = 0 \quad \mid +e$ $x_2 = e$

Lösungs-anzahl	0 / 1 / 2 Lösungen, je nachdem ob $-\frac{c}{a}$ < / = / > 0 ist	2 Lösungen, wovon eine $x_1 = 0$ ist	0 / 1 / 2 Lösungen, je nachdem ob Diskriminante D < / = / > 0 ist	0 / 1 / 2 Lösungen, je nachdem ob $-\frac{e}{a}$ < / = / > 0 ist	1 Lösung, wenn d = e (nämlich d bzw. e); 2 Lösungen, wenn d ≠ e (nämlich d und e)
Beispiel	$0{,}5x^2 - 8 = 0 \quad \mid +8$ $0{,}5x^2 = 8 \quad \mid :0{,}5$ $x^2 = 16 \quad \mid \sqrt{\ }$ $x_1 = 4$ $x_2 = -4$	$2x^2 - 3x = 0 \quad \mid$ x aus-klam. $x \cdot (2x - 3) = 0$ $x_1 = 0$ $2x_2 - 3 = 0 \quad \mid +3$ $2x_2 = 3 \quad \mid :2$ $x_2 = 1{,}5$	$3x^2 + 3x - 6 = 0 \quad \mid :3$ $x^2 + 1x - 2 = 0$ mit p = 1 und q = – 2 $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-2)}$ $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$ $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$ $x_1 = 1$ $x_2 = -2$	$3(x-2)^2 - 48 = 0 \quad \mid +48$ $3(x-2)^2 = 48 \quad \mid :3$ $(x-2)^2 = 16 \quad \mid \sqrt{\ }$ $x_1 - 2 = +4 \quad \mid +2$ $x_1 = 6$ $x_2 - 2 = -4 \quad \mid +2$ $x_2 = -2$	$4(x-2)(x+5) = 0$ $x - 2 = 0 \quad \mid +2$ $x_1 = 2$ $(x + 5) = 0 \quad \mid -5$ $x_2 = -5$
Anmer-kung	Wurzelziehen gem. den Rückwärtsrechen-regeln erst zum Schluss	Ausklammern liefert Produktgleichung (Näheres dazu siehe Anm. in letzter Spalte)	funktioniert immer; für pq-Formel auf Normal-form mit a = 1 achten	alternativ: mit Binomischen Formeln in allgemeine Form überführen und pq-/abc-Formel anwenden	Produktgleichung – ein Produkt ergibt dann 0, wenn min. ein Faktor 0 ist