Terme und Gleichungen, Rückwärtsrechnen, Lösungs- und Grundmenge

Term und Gleichung: Worin liegt der Unterschied?

Ein **Term** ist eine **Rechenvorschrift** wie 4a + 1 oder 42 – 2 + 8 oder x^2. Man löst den Term Schritt für Schritt, indem man nacheinander die **Teilaufgaben** des Terms löst (zusammenfassen, Klammern auflösen etc.). Dadurch wird der Term immer kompakter, weswegen man auch von **Vereinfachen** des Terms spricht. Schreibt man dies nun strukturiert untereinander, mit dem Gleichheitszeichen jeweils links, sieht es bspw. wie folgt aus:

```
  5(-x + 2 + 3) + 7x    | unser Term; wir verrechnen erst 2 + 3
= 5(-x + 5) + 7x        | nun lösen wir die Klammer mit dem DG auf
= -5x + 25 + 7x         | nun wird sortiert: -5x neben +7x
= -5x + 7x + 25         | nun -5x und +7x verrechnen
= 2x + 25               | das fertige Endergebnis
```

Bei dieser **Termschreibweise** ist es wichtig, stets den gesamten Term zu notieren, auch wenn man im aktuellen Schritt nur einen Teil davon verrechnet. So wird im Beispiel oben in jeder Zeile der hintere Teil „+7x“ mitgeschrieben, auch wenn wir ihn erst am Ende verrechnen.

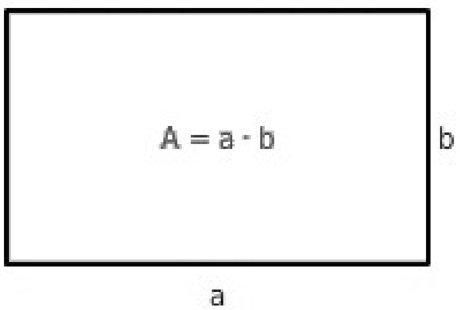
Dem entgegen muss man sich eine **Gleichung** etwas anders vorstellen. Sie besteht aus zwei Termen, die „gegenübergestellt“ sind; getrennt werden sie von einem Gleichheitszeichen. Gut versinnbildlichen kann man dies mit einer Balkenwaage (**Waagemodell**):

Die linke Seite der Waage muss genauso schwer sein wie die rechte – nur dann ist die Waage ausgeglichen (ansonsten würde wie auf einer Spielplatz-Wippe eine Seite nach unten kippen und die andere nach oben). Wir gehen davon aus, dass unsere Waage vom Gewicht her **immer ausgeglichen** sein soll. Übertragen auf mathematische Schreibweise bedeutet das: Auf der linken Seite der Waage „steht“ ein Term, auf der rechten „steht“ ein anderer Term. Ausgeglichen ist die Waage, wenn beide Terme „gleich“ – besser: gleich-wertig, also **äquivalent** – sind. Das wird ausgedrückt durch ein Gleichheitszeichen „=“ zwischen den Termen, weswegen wir auch von einer Gleichung sprechen. Wir betrachten bei einer Gleichung also immer zwei fest miteinander verbundene Terme auf zwei Seiten (links und rechts) eines Gleichheitszeichens. Entsprechend gibt es hier auch keine Termschreibweise, sondern eine **Gleichungsschreibweise**. Das Gleichheitszeichen sollte dabei immer mittig untereinander stehen. Beispiel:

```
7z + 2 - 3z + 1 = 1z + 8 - 5 + 3z    | Terme sortieren
7z - 3z + 2 + 1 = 1z + 3z + 8 - 5    | Terme zusammenf. (Var. z)
     4z + 2 + 1 = 4z + 8 - 5         | Terme zusammenf. (Zahlwerte)
         4z + 3 = 4z + 3
```

In diesem Beispiel haben wir durch Vereinfachen der Terme auf der linken und rechten Seite der Gleichung („Waage“) herausbekommen, dass der Wert („Gewicht“) jeweils 4z + 3 ist. Später werden wir lernen, den Wert für z genau anzugeben. Für den Moment geht es uns jedoch nur um die Schreibweise.

Ganz neu ist uns das Konzept einer Gleichung übrigens nicht. Bekannte Beispiele für Gleichungen sind **Formeln**, z. B. für die Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks:



Die entsprechende Formelberechnung sieht dann in Gleichungsschreibweise wie folgt aus:

```
A = a • b             | a = 3 cm und b = 7 cm einsetzen
A = 3 cm • 7 cm       | ausrechnen
A = 21 cm²
```

(Tipp am Rande zur Vorgehensweise: 1. Schritt: Formel notieren, 2. Schritt: Werte einsetzen, 3. Schritt: Gleichung lösen / Wert ausrechnen)

Rückwärtsrechnen

Wie löst man nun eine Gleichung? Dafür hat man in der Mathematik spezielle Techniken entwickelt. Die wichtigste ist die Äquivalenzumformung. Äquivalenzumformungen machen wir aber nicht jetzt am Anfang, sondern erst später, weil sie auf der Idee des **Rückwärtsrechnens** aufbauen und wir uns daher das Rückwärtsrechnen erst nochmal genauer ansehen. Zu den Äquivalenzumformungen ist es dann nur noch ein kleiner Schritt, der lediglich die Schreibweise betrifft. Doch mehr dazu später. Betrachten wir erst das Konzept des Rückwärtsrechnens, das noch aus der Grundschule schon bekannt sein sollte. Beispiel:

```
3t + 150 = 195
```

Eine solche Gleichung kann man wie ein Zahlenrätsel auffassen: Welche Zahl wurde für t „versteckt“, so dass wenn man t mit 3 multipliziert und zum Zwischenergebnis 150 addiert, man am Ende 195 erhält? Diese gesuchte Zahl, die die Gleichung erfüllt, heißt **Lösung der Gleichung**.

Bei diesem einfachen Gleichungsbeispiel ist es durchaus möglich, mit einem „scharfen Blick“ die Lösung zu „erknobeln“. Aber das genügt natürlich nicht – spätestens wenn die Aufgaben schwerer (komplexer) werden, benötigt man eine vernünftige Vorgehensweise (**Methode**), um die Gleichung zu lösen: Rückwärtsrechnen!

Ziel ist es dabei, die Zahl für t zu ermitteln, so dass der linke Term der Gleichung gleich(wertig) dem rechten Term der Gleichung ist. In der Mathematik sagt man dazu auch: Die Gleichung wird **nach t aufgelöst**.

Beim Rückwärtsrechnen gelten folgende **Regeln:**

1. Anstelle „Punkt vor Strich“ gilt „**Strich vor Punkt**“.
2. Die **Umkehrrechnung** von „Plus“ (Addition) ist „Minus“ (Subtraktion) und umgekehrt; die Umkehrrechnung von „Mal“ (Multiplikation) ist „Durch“ (Division) und umgekehrt.

Zurück zum Beispiel:

```
3t + 150 = 195
```

Der normale Rechenweg sieht wie folgt aus: Würde man den Wert für t kennen, so müsste man zuerst 3 • t, also eine Punkt-/Malrechnung, durchführen. Dieses Zwischenergebnis müsste man in einem zweiten Schritt mit +150, also einer Strich-/Plusrechnung, verrechnen. Es gilt „Punkt vor Strich“.

Beim Rückwärtsrechnen machen wir das nun umgekehrt (vgl. Regeln oben):

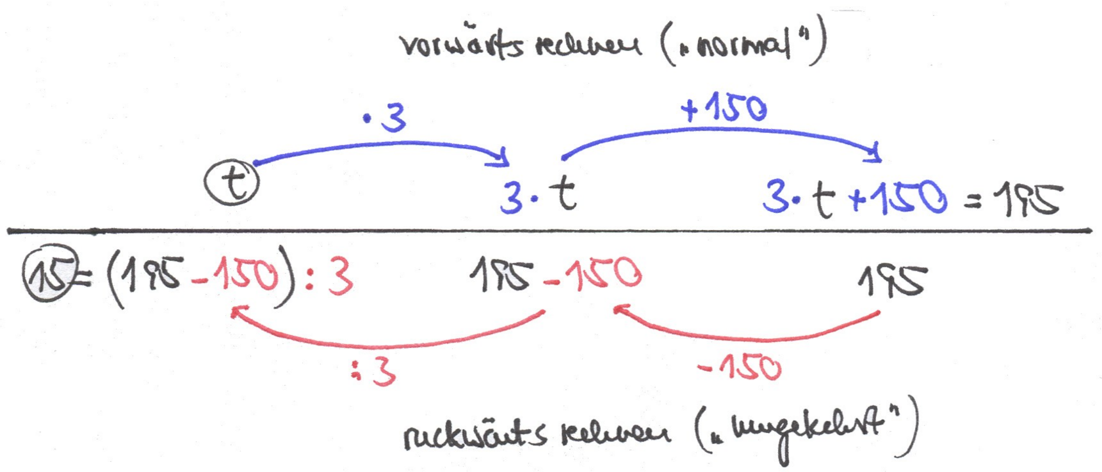
1. Schritt: Man geht vom Ergebnis 195 aus und rechnet „Strich vor Punkt“. Dazu muss also erst die Strichrechnung +150 umgekehrt werden. Zu „Plus“ lautet die Umkehrrechnung „Minus“. Also rechnen wir:

```
195 - 150 = 45
```

2. Schritt: Jetzt gehen wir von dem Zwischenergebnis 45 aus. Da die Strichrechnung schon umgekehrt wurde, bleibt nur noch die Punktrechnung • 3 übrig. Zu „Mal“ lautet die Umkehrrechnung „Durch“. Also rechnen wir:

```
45 : 3 = 15
```

Grafisch lässt sich das wie folgt darstellen:



Jetzt sind wir fertig. 15 ist die gesuchte Zahl hinter dem t (man schreibt: t = 15). Wenn wir möchten, können wir unser Ergebnis mit einer **Probe** überprüfen:

```
    3t + 150 = 195      | für t = 15 einsetzen
3 • 15 + 150 = 195      | Term links vereinfachen (3 • 15)
    45 + 150 = 195      | Term links vereinfachen (45 + 150)
         195 = 195
```

Prima, wir erhalten mit 195 = 195 eine sogenannte „**wahre Aussage**“. Das bedeutet, wir haben alles richtig gemacht, t = 15 ist die gesuchte Zahl unseres „Zahlenrätsels“. Der Wert des Terms auf der linken Seite der Gleichung (3 • 15 + 150) ist gleich dem Wert der rechten Seite der Gleichung (195).

Lösungsmenge

Da wir mit t = 15 nun eine Lösung der Gleichung haben, sollten wir diese „vernünftig“ aufschreiben. In der Mathematik hat sich dafür die sogenannte **Lösungsmenge** durchgesetzt: In sie schreibt man alle Lösungen der Gleichung hinein. Als Zeichen für die Lösungsmenge verwendet man ein „**L**“ (zuweilen auch mit einem zusätzlichen senkrechten Strich links neben dem „L“, um eine Verwechslung mit dem Buchstaben „L“, der bspw. für Eckpunkte bei Zeichnungen verwendet werden könnte, zu vermeiden). Nach dem „L“ folgt ein Gleichheitszeichen „=“ und eine geschweifte Klammer mit der darin enthaltenen Lösung.

Exkurs: Klammerarten (inkl. ihre Verwendung in der Mathematik)

( ) runde Klammer: u. a. zur Klammerung bei Termen verwendet, z. B. 3 • (5 + 6);
[ ] eckige Klammer: u. a. zur Klammerung bei Termen verwendet, z. B. 3 • [(5 + 6) – 2];
< > spitze Klammer: als Kleiner- bzw. Größer-Zeichen verwendet, z. B. 10 < 20;
{ } geschweifte Klammer: u. a. für Zahlenmengen verwendet, z. B. N = {0; 1; 2; 3; …}.

Für unser obiges Gleichungsbeispiel sieht die Lösungsmenge wie folgt aus:
L = {15}

Je nachdem, welche Gleichung vorliegt, kann es sein, dass diese **verschieden viele Lösungen** hat, also verschieden viele Zahlen das „Zahlenrätsel“ erfüllen. Beispiel:

```
x = x + 8
```

Ohne viel Rückwärtsrechnen anwenden zu müssen, sieht man schnell: Eine Zahl kann nicht um 8 größer sein als sie selbst (das klappt auch nicht für die 0 (Null), die oftmals einen Sonderfall darstellt). Entsprechend gibt es für diese Gleichung **keine Lösung**, nicht einmal die Null. Die Lösungsmenge ist demnach leer, man nennt sie passenderweise **Leere Menge**: L = { }.

Ein weiteres Beispiel ergibt sich aus folgender Gleichung:

```
x • (x + 5) = 0
```

Durch Probieren sieht man, dass sowohl x = 0, als auch x = –5 die Gleichung erfüllen (probiere es im Kopf aus!). Wir haben also eine Gleichung mit **zwei Lösungen**. Die Lösungsmenge lautet L = {–5; 0}. Dabei sortiert man die Werte in der Mengenklammer der Größe nach von klein nach groß und trennt sie mit einem Komma „ , “ oder Semikolon „ ; “.

Als vierten Fall neben keiner, einer und zwei Lösungen betrachten wir folgenden Sonderfall:

```
7z + 2 - 3z + 1 = 1z + 8 - 5 + 3z
```

Dabei handelt es sich um unser Einstiegsbeispiel zu Gleichungen oben. Wie wir wissen, ergibt sich am Ende folgende Vereinfachung der Gleichung:

```
4z + 3 = 4z + 3
```

Die Terme auf beiden Seiten der Gleichung sind äquivalent – hier sogar unübersehbar identisch. Was bedeutet das nun für die Lösungsmenge? Nun, es ist hier egal, welche Zahl man für z einsetzt – jede beliebige Zahl erfüllt die Gleichung. Setzen wir eine beliebige Zahl in den linken Term 7z + 2 – 3z + 1 und danach in den rechten Term 1z + 8 – 5 + 3z ein, so werden wir sehen, dass stets das gleiche Ergebnis herauskommt (probiere es aus!). Somit hat diese besondere Gleichung **unendlich viele Lösungen**. Man sagt auch, die Gleichung ist **allgemeingültig**. Da man nun nicht alle Zahlen der Welt in der Lösungsmenge auflisten kann, bedient man sich eines Tricks: Man schreibt einfach die Zahlenmenge (N, Z, Q etc.) in die Lösungsmenge hinein. In diesem Fall ist es sinnvoll, die „umfassendste“ Zahlenmenge, die wir bisher kennengelernt haben, zu verwenden, nämlich Q (rationale Zahlen). Die Mengenklammern werden für diesen Sonderfall häufig weggelassen: L = Q.

Wie wir sehen, haben unterschiedliche Gleichungen nicht nur verschiedene Lösungen, sondern auch verschieden *viele* Lösungen. Doch es kommt noch besser – nämlich indem wir die Grundmenge hinzuziehen.

Grundmenge

Micha behauptet, dass in seiner Klasse dreimal so viele Mädchen wie Jungen sind. Insgesamt seien es 30 Schülerinnen und Schüler. Um Michas Behauptung zu überprüfen, kann man eine Formel zur Berechnung der Anzahl der Jungen aufstellen, wobei „j“ für die Anzahl der Jungen steht. Damit ergibt sich für die Gesamtzahl folgende Formel:

```
j + 3j = 30
```

Zur Erklärung: Das erste „j“ steht für die Anzahl der Jungen in der Klasse. „3j“ beschreibt die Anzahl der Mädchen – nämlich dreimal so viel wie die Anzahl der Jungen. Insgesamt sind es 30 Schülerinnen und Schüler, also „= 30“. Durch Vereinfachen und Rückwärtsrechnen ergibt sich:

```
j + 3j = 30       | Term links vereinfachen (j + 3j)
    4j = 30
```

Nun mit :4 rückwärtsrechnen, also

```
30 : 4 = 7,5
```

Die Lösung ist also j = 7,5. Machen wir dazu die Probe:

```
       j + 3j = 30     | für j = 7,5 einsetzen
7,5 + 3 • 7,5 = 30     | Term links vereinfachen (3 • 7,5)
   7,5 + 22,5 = 30     | Term links vereinfachen (7,5 + 22,5)
           30 = 30
```

Eine wahre Aussage, also stimmt unser Ergebnis. Doch was bedeutet das nun im Sinne der Textaufgabe? Es bedeutet, dass die Anzahl der Jungen j = 7,5 Personen beträgt. Und genau hier liegt das Problem: Es können keine 7,5 Jungen in der Klasse sein, weil es keine „halben Jungen“ geben kann! Da unsere Gleichung aber rechnerisch stimmt und wir uns nicht verrechnet haben, bleibt nur der Schluss, dass Michas Behauptung nicht stimmt.

Aus diesem Beispiel lernen wir, dass es Aufgaben gibt, für die nur eine **bestimmte Art von Lösungen sinnvoll oder gewünscht** ist – z. B. positive ganze Zahlen, weil es nur „ganze Schüler“ geben kann. Mit Zahlenmengen gesprochen bedeutet das, dass in unserem Beispiel nur natürliche Zahlen Lösungen sein dürfen. Diese Bedingung, aus welcher Zahlenmenge die Lösungen stammen dürfen, heißt **Grundmenge**. Als Zeichen für die Grundmenge verwendet man ein „**G**“ (zuweilen auch mit einem zusätzlichen senkrechten Strich links neben dem „G“, ähnlich wie bei der Lösungsmenge, s. o.). Die Grundmenge beschreibt demnach die **erlaubten Einsetzungen für L**, also welche Art von Zahl (natürliche, ganze, rationale etc.) die Lösung sein soll bzw. darf. Da unsere Beispielaufgabe eine Anwendungsaufgabe ist, in der sinnigerweise nur „ganze Schüler“ vorkommen können, ist als Grundmenge G = N zu wählen, so dass nur natürliche Zahlen in die Lösungsmenge geschrieben werden dürfen – egal, was rechnerisch herauskommt. Somit ergibt sich hier L = { }, da 7,5 zwar eine Lösung der Gleichung ist, aber gegen die Vorgabe G = N verstößt.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel, um den Sachverhalt zu verinnerlichen:

```
4x - 1 = 9
```

1. Schritt: mit +1 rückwärtsrechnen, also

```
9 + 1 = 10
```

2. Schritt: mit :4 rückwärtsrechnen, also

```
10 : 4 = 2,5
```

Wenn man nun als Vorgabe G = Q macht, ergibt sich für L = {2,5}, da 2,5 eine rationale Zahl ist. Für G = Z ergibt sich aber L = { }, da 2,5 keine ganze Zahl ist. Für G = N ergibt sich auch L = { }, da 2,5 keine natürliche Zahl ist (was wiederum logisch ist, da 2,5 ja auch keine ganze Zahl ist).

Fazit

- **Terme** sind Rechenvorschriften, die mittels Termschreibweise Schritt für Schritt vereinfacht werden (zusammenfassen, Klammern auflösen etc.).
- **Gleichungen** kann man sich mit dem Waagemodell vorstellen – sie bestehen aus zwei äquivalenten Termen, die durch ein Gleichheitszeichen getrennt werden. Bekannte Beispiele für Gleichungen sind Formeln. Man löst sie durch Rückwärtsrechnen in der Gleichungsschreibweise (später: mittels Äquivalenzumformungen), indem man nach einer Variable auflöst. Die dabei resultierende Zahl, die die Gleichung erfüllt, heißt Lösung der Gleichung. Durch eine Probe kann man die Lösung überprüfen; bei einer erfolgreichen Probe kommt eine wahre Aussage heraus.
- **Rückwärtsrechnen** gehorcht folgenden Regeln: 1. Anstelle „Punkt vor Strich“ gilt „Strich vor Punkt“. 2. Die Umkehrrechnung von „Plus“ (Addition) ist „Minus“ (Subtraktion) und umgekehrt; die Umkehrrechnung von „Mal“ (Multiplikation) ist „Durch“ (Division) und umgekehrt.
- In der **Lösungsmenge** L steht in geschweiften Klammern die Lösung einer Gleichung, d. h. die Zahl(en), die die Gleichung erfüllen. Lösungsmengen können unterschiedlich viele Anzahlen von Lösungen haben. Dabei ergeben sich u. a. zwei Sonderfälle: keine Lösung, was durch die Leere Menge L = { } dargestellt wird, und „alle Zahlen“ (unendlich viele) als Lösung, also L = Q (später: L = R). Im letztgenannten Fall ist die Gleichung allgemeingültig.
- Die **Grundmenge** G beschreibt die erlaubten Einsetzungen für L, also welche Art von Zahl (natürliche, ganze, rationale etc.) die Lösung sein soll bzw. darf. Eine mögliche Vorgabe könnte bspw. G = N lauten. Somit ist es möglich, dass ein und dieselbe Gleichung je nach vorgegebener Grundmenge unterschiedliche Lösungsmengen besitzt.