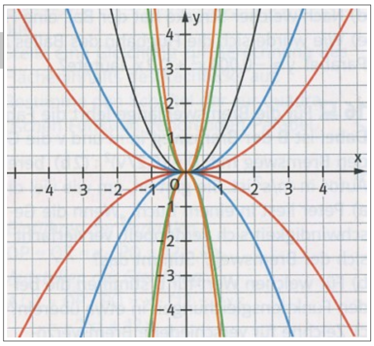
Quadratische Funktionen: Scheitelform und allgemeine Form

– Ergänzung zum Lehrbuch LS Mathematik 9 (G9 Hessen), Kap. VI.3 –



Wiederholung

Die binomischen Formeln lauten:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$
3. $(a + b) \cdot (a – b) = a^2 – b^2$

Folgende Arten von quadratischen Funktionen kennen wir:

$f(x) = ax^2$ *rein* quadratische Funktion
$f(x) = a\,(x – d)^2 + e$ *allgemeine* quadratische Funktion, hier in der Scheitelform

Bei letzterer kann man den Scheitelpunkt SP leicht ablesen:

SP (d | e)

Scheitelform

Gegeben sei der Funktionsterm $f(x) = 2\,(x – 1)^2 + 3$. Dabei handelt es sich um eine quadratische Funktion der Form $f(x) = a\,(x – d)^2 + e$, die im Vergleich zur Normalparabel

- um den Faktor a = 2 gestreckt ist,
- um eine Einheit nach rechts verschoben ist (d = 1) und
- um 3 Einheiten nach oben verschoben ist (e = 3).

Man bezeichnet die Form der obigen quadratischen Funktionsgleichung als **Scheitelform** (auch: **Scheitelpunktform**). Das liegt daran, dass man den Scheitelpunkt des dazugehörigen Funktionsgraphen leicht ablesen kann, nämlich SP (d | e), hier also SP (1 | 3).

> **Merke**
> Einen Funktionsterm der Form $f(x) = a\,(x – d)^2 + e$ bezeichnet man als **Scheitelform**.

Allgemeine Form

Nun kann es aber vorkommen, dass ein Funktionsterm nicht in dieser für uns recht angenehmen Schreibweise gegeben ist, sondern in einer anderen. Stellen wir uns dafür vor, obiger Term würde ausmultipliziert:

$f(x) = 2\,(x – 1)^2 + 3$ | T: 2. binom. Formel anwenden

$= 2\,(x^2 - 2x + 1) + 3$ | T: Klammer ausmultiplizieren
$= 2x^2 - 4x + 2 + 3$ | T: zusammenfassen
$= 2x^2 - 4x + 5$

Der nun so umgeformte Funktionsterm hat die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$. Diese Form eines quadratischen Funktionsterms bezeichnet man als **allgemeine Form**. Man erhält sie aus der Scheitelform durch **Ausmultiplizieren**.

Merke

Einen Funktionsterm der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ bezeichnet man als **allgemeine Form**.

Quadratisches, lineares und absolutes Glied

Wie wir leicht erkennen können, bestehen die Terme quadratischer Funktionen, die in der allgemeinen Form gegeben sind, aus 3 Teilen, nämlich ax^2, bx und c. Man nennt diese Teile in der Mathematik **Glieder** (wie die einer Kette). Das erste Glied kennzeichnet sich insbesondere durch das „x^2“, aus diesem Grund nennt man es **quadratisches Glied**. Markant beim zweiten Glied ist das „x“ (wie bei einer linearen Funktion), daher heißt dieses **lineares Glied**. Der hintere Teil wird schließlich als **absolutes Glied** bezeichnet.

Merke

Die allgemeine Form eines quadratischen Funktionsterms besteht aus 3 **Gliedern**:

ax^2: **quadratisches** Glied bx: **lineares** Glied c: **absolutes** Glied

Das Problem ist nun, dass in der mathematischen Praxis Gleichungen quadratischer Funktionen häufig nicht in der Scheitelform, sondern in der allgemeinen Form vorkommen. An diesen kann man zwar noch erkennen, wie die zugehörige Parabel gestreckt wurde (im Beispiel oben: a = 2) (Bonusinformation: Anhand von c kann man auch sehen, wo die Parabel die y-Achse schneidet, nämlich bei (0 | c).) Aber die wichtigste Information – wo der Scheitelpunkt liegt – kann man nicht mehr ablesen. Was kann man also tun, um in einem solchen Fall die Scheitelform zu erhalten, damit der Scheitelpunkt einfach abgelesen werden kann?

Quadratische Ergänzung

Die Antwort heißt: **quadratische Ergänzung**. Denn es lässt sich im umgekehrten Fall jede quadratische Funktion, die in der allgemeinen Form gegeben ist, mit Hilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelform umformen. Hierbei wird der Funktionsterm so ergänzt, dass eine **binomische Formel** angewendet werden kann. Das wollen wir zunächst an einem einfachen Beispiel üben.

Aufgabe:

Ergänze den in allgemeiner Form angegebenen Funktionsterm $f(x) = x^2 - 10x + \diamond$ so, dass man eine binomische Formel anwenden kann.

Lösung:

Man sieht schnell, dass der Term aufgrund seines Aufbaus wie die rechte Seite der 2. binomischen Formel aussieht: $a^2 – 2ab + b^2$.

Damit wir bei den unterschiedlichen Buchstaben nicht durcheinander kommen, denken wir uns unseren Ausgangsterm anstelle mit „x“ nun mit „a“ geschrieben: $a^2 – 10a + \diamond$. Vergleicht man beide nun miteinander, so wird deutlich, dass im mittleren Teil (lineares Glied) 2b in der binomischen Formel 10 in unserem Beispielterm entspricht (das „a“ gleicht sich aus, da bei beiden gegeben). Somit erhalten wir:

$2b = 10 \qquad | : 2$
$b = 5$

Gemäß der binomischen Formel wissen wir, dass hinten, also in unserem Beispielterm der mit „◇“ gesuchte Teil, b^2 entsprechen muss. Also rechnen wir mit 5^2:

$\ a^2 – 10a + \diamond \qquad$ | für „◇“ (bzw. b²) 5² einsetzen
$= a^2 – 10a + 5^2 \qquad$ | T
$= a^2 – 10a + 25$

Der jetzige Term entspricht einer gültigen rechten Seite der 2. binomischen Formel. Nun können wir daraus ganz einfach die linke Seite der 2. binomischen Formel erzeugen:

$\ a^2 – 10a + 25 \qquad$ | T
$= (a – 5)^2$

Damit hätten wir den ursprünglich in allgemeiner Form abgegebenen Funktionsterm $f(x) = x^2 – 10x + \diamond$ in die Scheitelform $f(x) = (x – 5)^2$ gebracht. Das Ablesen des Scheitelpunkts ist nun ein Kinderspiel: SP (d | e) = (5 | 0).

Dem aufmerksamen „Mitdenker“ ist womöglich etwas aufgefallen: Man bekommt den in der Aufgabe mit „◇“ gesuchten Teil heraus, indem man den konstanten Faktor des linearen Gliedes (hier: 10) durch 2 teilt und das Ergebnis quadriert:

$(10 : 2)^2 = 25$

Das Ergebnis muss dann nur noch für „◇“ eingesetzt werden, und schon kann man blitzschnell die binomische Formel anwenden. Man nennt diese Rechnung („Faktor des linearen Gliedes durch 2 und das Ergebnis zum Quadrat“) die **quadratische Ergänzung**.

Merke

Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion kann in der **Scheitelform** $f(x) = a (x – d)^2 + e$ oder in der **allgemeinen Form** $f(x) = ax^2 + bx + c$ dargestellt werden.

Durch **Ausmultiplizieren** erhält man aus der Scheitelform die allgemeine Form.

Umgekehrt erhält man durch **quadratische Ergänzung** aus der allgemeinen Form die Scheitelform.

Für $a = 1$ in der allgemeinen Form gilt: Die quadratische Ergänzung entspricht der Rechnung **„Faktor des linearen Gliedes durch 2 und das Ergebnis zum Quadrat“**.

Beispielaufgaben

Betrachten wir nun einige Beispielaufgaben, bei denen wir eine quadratische Gleichung von der allgemeinen Form in die Scheitelform umwandeln wollen. Dabei wird der Schwierigkeitsgrad zunehmend steigen. Wie wir sehen werden, sind dabei zum einen das absolute Glied und der Streckfaktor von besonderer Bedeutung.
Zur Erinnerung: Die Methode dazu ist die quadratische Ergänzung, um die rechte Seite einer gültigen binomischen Formel zu erhalten. Daraus ergibt sich als Ziel die Scheitelform, um den Parabelverlauf (und insbes. den Scheitelpunkt) ablesen zu können.

Beispiel 1:

Eine erste „Fingerübung“ wie in der Erklärung oben, bei der wir uns ein passendes absolutes Glied quasi „aussuchen“ dürfen, damit die binomische Formel anwendbar ist.

$y = x^2 + 12x + \diamond$ | $\diamond = 6^2$, weil q.E.: $\left(\frac{12}{2}\right)^2 = 6^2$

$y = \boxed{x^2 + 12x + 6^2}$ | T: 1. binom. Formel anwenden (vgl. Kasten)

$y = \boxed{(x + 6)^2}$

→ SP (–6 | 0)

Beispiel 2:

Das absolute Glied ist jetzt nicht mehr ganz frei wählbar, sondern mit dem Wert c = 0 vorgegeben (dadurch kann man es in der Gleichung auch weglassen). Das Problem ist nur, dass dieses c = 0 der falsche Wert ist, um eine gültige rechte Seite einer binomischen Formel darzustellen. Die Frage ist nun ähnlich zu Beispiel 1, welches c „schön wäre“, wenn es dort stünde (→ quadratische Ergänzung). Diesen Wert müssen wir dann – Vorsicht! – mittels Äquivalenzumformung auf *beiden* Seiten der Funktionsgleichung addieren. Warum auf beiden? Weil wir den Wert der Gleichung ja nicht einseitig verändern dürfen, sonst ist sie ja nicht äquivalent zu ursprünglichen.

$y = x^2 + 12x$ | $+6^2$, weil q.E.: $\left(\frac{12}{2}\right)^2 = 6^2$

$y \underline{+ 6^2} = x^2 + 12x \underline{+ 6^2}$ | T: um nach y aufzulösen, holen wir + 6² von der linken Seite nach rechts – verrechnen es aber absichtlich nicht!

$y = \boxed{x^2 + 12x + 6^2} - 6^2$ | T: 1. binom. Formel anwenden (vgl. Kasten)

$y = \boxed{(x + 6)^2} - 6^2$ | T

$y = (x + 6)^2 - 36$

→ SP (–6 | –36)

Beispiel 3:

Wie Beispiel 2, nur dass das „falsche“ absolute Glied nun „konkret dasteht“, weil sein Wert $c \neq 0$ (hier: 13) ist und nicht weggelassen werden kann.

y	$=$	$x^2 + 12x + 13$	$\mid +6^2$, weil q.E.: $\left(\frac{12}{2}\right)^2 = 6^2$
$y \underline{+ 6^2}$	$=$	$x^2 + 12x \underline{+ 6^2} + 13$	$\mid$ T: Details s. o.
y	$=$	$\boxed{x^2 + 12x + 6^2} - 6^2 + 13$	$\mid$ T: 1. binom. Formel anwenden (vgl. Kasten)
y	$=$	$\boxed{(x + 6)^2} - 6^2 + 13$	$\mid$ T
y	$=$	$(x + 6)^2 - 23$	

→ SP (–6 | –23)

Beispiel 4:

Nun „die Krönung“: Gegeben ist eine quadratische Gleichung in der allgemeinen Form mit einem „falschen“ vorgegebenen Wert c (hier: 13) und der Streckfaktor a hat erstmals nicht den Wert 1, sondern einen davon abweichenden (hier: 3). Das macht die Sache deutlich komplizierter, weil wir den Streckfaktor für die Anwendung der binomischen Formel erst ausklammern müssen (die linke Seite der binomischen Formel lautet ja nur $(a + b)^2$ und nicht z. B. $3 \cdot (a + b)^2$).

y	$=$	$3x^2 + 12x + 13$	$\mid$ T: 3 aus quadr. und linearem Glied ausklammern
y	$=$	$3\,[x^2 + 4x] + 13$	$\mid +2^2$, weil q.E.: $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2^2$
$y \underline{+ 2^2}$	$=$	$3\,[x^2 + 4x \underline{+ 2^2}] + 13$	$\mid$ T: Details s. o.
y	$=$	$3\,[\boxed{x^2 + 4x + 2^2} - 2^2] + 13$	$\mid$ T: 1. binom. Formel anwenden (vgl. Kasten)
y	$=$	$3\,[\boxed{(x + 2)^2} - 2^2] + 13$	$\mid$ T
y	$=$	$3\,[(x + 2)^2 - 4] + 13$	$\mid$ T: nun eckige Klammer wieder auflösen
y	$=$	$3\,(x + 2)^2 - 12 + 13$	$\mid$ T
y	$=$	$3\,(x + 2)^2 + 1$	

→ SP (–2 | 1)

Beispiel 5:

Wem das zu schnell ging oder wer ein weiteres komplexes Beispiel neben Beispiel 4 benötigt, wird mit einer diesmal ausführlichen Kommentierung hier fündig.

Berechnung	**Beschreibung**
$y = 2x^2 - 9x + 15$ $\mid$ T	Bei dieser Aufgabe sind zwei dinge von besonderer Relevanz: (1) Das absolute Glied ist mit c = 15 vorgegeben. (2) Im quadratischen Glied steht ein Faktor a ≠ +1, nämlich a = 2. Dieser muss aus den beiden vorderen Gliedern ausgeklammert

		werden, bevor man die quadratische Ergänzung anwendet.
$= \; 2[x^2 - \frac{9}{2}x] + 15$	$\mid + (\frac{9}{2} : 2)^2$	An dieser Stelle ist es sinnvoll eine eckige Klammer zu schreiben, damit man diesen Bereich später besser von der runden Klammer der binomischen Formel unterscheiden kann. Nun wird es spannend: Wir wenden die quadratische Ergänzung an. Dazu nehmen wir vom Faktor des linearen Gliedes (hier: neun Halbe) die Hälfte und quadrieren das Ergebnis. Heraus kommt neun Viertel zum Quadrat. Diesen Wert addieren wir nun zum Term und ziehen ihn – einen Äquivalenzumformungsschritt einsparend zu den vorigen Beispielen oben – sogleich wieder ab, damit wir den Funktionswert als Ganzes nicht verfälschen!
$= \; 2[x^2 - \frac{9}{2}x + (\frac{9}{4})^2 - (\frac{9}{4})^2] + 15$	| T: 2. BF	Ja, das sieht zunächst sehr umständlich und vermeintlich unsinnig aus, aber bringt uns nun einen entscheidenden Vorteil. Denn jetzt betrachten wir in der eckigen Klammer die ersten 3 Glieder. Diese stellen nun eine gültige rechte Seite der 2. binomischen Formel dar. Machen wir daraus die linke Seite!
$= \; 2[(x - \frac{9}{4})^2 - (\frac{9}{4})^2] + 15$	| T	Direkt hinter der geöffneten eckigen Klammer steht nun in neuen runden Klammern eine gültige linke Seite der 2. binomischen Formel. Der Rest ist ein Kinderspiel: Term vereinfachen, indem zunächst neun Viertel in Klammern zum Quadrat ausgerechnet wird.
$= \; 2[(x - \frac{9}{4})^2 - \frac{81}{16}] + 15$	| T	Das Ergebnis ist 81 Sechszehntel. Jetzt lösen wir die eckige Klammer auf, indem wir die führende 2 mit allen Teilen des Terms (außer 15, da diese ja nicht Teil der eckigen Klammer ist) verrechnen.
$= \; 2(x - \frac{9}{4})^2 - \frac{81}{8} + 15$	| T	Nun sind wir fast fertig. Die 2 wird *nicht* weiter mit der runden Klammer der binomischen Formel verrechnet (das wäre unsinnig, weil wir uns damit die Scheitelform wieder „zerschießen“ würden). Statt dessen berechnen wir das hintere absolute Glied.
$= \; 2(x - 2{,}25)^2 + 4{,}875$		Fertig! ☺ (Anm.: 81 Achtel + 15 ergibt 4,875)

Wie man sieht, hat der endgültige Funktionsterm die Scheitelform $f(x) = a\,(x - d)^2 + e$ mit $a = 2$, $d = 2{,}25$ und $e = 4{,}875$.

Der Scheitel der zu dieser Funktion gehörenden Parabel liegt also bei SP (2,25 | 4,875).