(1) **Zur Erinnerung:** $\underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{\text{Variable}} + 8}_{\text{Term}} = 20}_{\text{Gleichung}}$

$$3 \cdot (x+4) = 3(x+4) = 3 \cdot x + 3 \cdot 4 = \underline{3x + 12}$$

$$1x = x$$

$$2m + 4 + 3m = \underline{\underline{5m + 4}}$$

Ergänzungen zu S. 179f im Buch!!

Gleichungen sind Erweiterungen zu Termen, da nun ein weiterer Term auf der "anderen Seite" hinzugefügt wird. Dabei muss der Wert beider Terme, also links und rechts von dem Gleichheitszeichen, „gleich" sein. Man kann sich das vorstellen wie eine alte Waage, bei der auf der linken und rechten Seite jeweils das gleiche Gewicht sein muss, damit sie im Gleichgewicht ist:

$$8x + 4 = 52$$

(im Gleichgewicht, da gerade und keine Schieflage)

Nebenbei: Man darf die Seiten einer Gleichung vertauschen, z.B. $8x+4 = 52$ oder $52 = 8x+4$

Ein weiteres Vorstellungsmodell ist, dass wir Gleichungen wie ein Zahlenrätsel betrachten: Welche Zahl wurde durch x versteckt, so dass die Gleichung stimmt? Manchmal bekommt man dies mit einem scharfen Blick heraus, doch der Mathematiker kennt noch eine spezielle Methode: Äquivalenzumformungen. Dabei werden die Seiten der Gleichung umsortiert, bis x alleine steht (z.B. $x = 6$ im Beispiel oben). Man sagt: nach x "auflösen". Die dabei durchgeführten Äquivalenzumformungen dürfen jedoch nicht beliebig sein, da die Waage ja stets im Gleichgewicht sein muss! Sehen wir uns dazu einige Beispiele an.

Bsp. 1: $x = 10$

Eine sehr einfache Gleichung; hier gibt es eigentlich nichts mehr zu tun, denn die Gleichung benennt uns zugleich die Lösung: 10. Wenn man also für x die Zahl 10 einsetzt, stimmt die Gleichung, 10 ist also die gesuchte Zahl.

$x = 10$ [für x die 10 einsetzen]

$10 = 10$ ✓ Stimmt!

Man sagt nun: 10 ist eine Lösung für die Gleichung, 10 erfüllt die Gleichung. Dazu gibt man häufig noch eine sog. Lösungsmenge an:

$\mathbb{L} = \{10\}$ Alle Zahlen in der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ erfüllen die Gleichung.

Beispiel 2:

ein senkrechter Strich; dahinter steht was man im nächsten Schritt rechnen wird (hier: durch 2).

$2 \cdot x = 10 \quad | :2$ ← Damit x alleine steht, muss die 2 weg. Diese ist jedoch mit „·" (mal) an x gebunden. Also wendet man die Umkehrrechnung an.

$\frac{{}^{1}\cancel{2}x}{\cancel{2}_{1}} = \frac{{}^{5}\cancel{10}}{\cancel{2}_{1}}$ ← Zwischenschritt. Man muss : 2 auf beiden Seiten der Gleichung rechnen, damit sie „gleich" bleibt.

$\underline{\underline{x = 5}}$ ← Nach dem Kürzen oben bleibt als Lösung 5. $\mathbb{L}$ ist also 5.

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{5\}$

Machen wir die Probe und setzen 5 in die Gleichung für x ein:

$2x = 10$ [x = 5 einsetzen]

$2 \cdot 5 = 10$

$10 = 10$ ✓ Stimmt!

Hinweis:
Achte bei Gleichungen darauf, das „=" sauber untereinander zu schreiben wie im Beispiel links.

Beispiel 3:

$2x - 4 = 10 \quad | +4$ ← Bevor man an die 2 als Faktor vor dem x rangeht, packt man erst die anderen Additionen/Subtraktionen des Terms (hier: −4) auf die andere Seite.

$2x - 4 + 4 = 10 + 4 \quad | T$

$2x = 14 \quad | :2$

$\underline{\underline{x = 7}}$

Erstes Ziel erreicht: die −4 links ist weg. Nun die 2· weg!

Zwischenschritt. Der Mathematiker schreibt hier gerne „T" hin, für „Termumformung".
Das andere nennt man Äquivalenzumformung oder Gleichungsumformung (Im Bsp. 3 sind das die Rechnung +4 und : 2).

$\mathbb{L} = \{7\}$

Beispiel 4: (ähnliche Aufgabe wie Beispiel 3)

$$\begin{aligned} 2x+4 &= 10 && \mid -4 \\ 2x+4-4 &= 10-4 && \mid T \\ 2x &= 6 && \mid :2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

← Diesmal nicht +4, sondern −4

← Zwischenschritt (Termumformung, werden wir in zukünftigen Beispielen weglassen und im Kopf rechnen)

$\mathbb{L} = \{3\}$

Probe: $2x+4=10$ [für $x=3$ einsetzen]
$2\cdot3+4=10$
$10=10$ ✓

Beispiel 5:

$$\begin{aligned} -2x+6 &= -10 && \mid -6 \\ -2x &= -16 && \mid :(-2) \\ \frac{\cancel{-}\cancel{2}^{1}x}{\cancel{-}\cancel{2}_{1}} &= \frac{\cancel{-}\cancel{16}^{8}}{\cancel{-}\cancel{2}_{1}} && \mid T \\ x &= 8 \end{aligned}$$

← Zur Erinnerung: Ziel ist es x rauszufinden. Dafür müssen wir nach x auflösen, also x „freistellen". Zu erst packen wir das "Drumherum" weg, also erst die 6, danach die 2

Hier muss man :(−2) rechnen und nicht etwa +2. Denn die −2 ist mit einem Mal („·") mit dem x verbunden, und das zählt stärker!!
(Punkt vor Strich!)

$\mathbb{L} = \{8\}$

Probe: $-2x+6=-10$
$-2\cdot8+6=-10$
$-10=-10$ ✓

Beispiel 6:

$$\begin{aligned} -(x-3+15) &= 0 && \mid T \\ -x+3-15 &= 0 && \mid T \\ -x-12 &= 0 && \mid +12 \\ -x &= 12 && \mid \cdot(-1) \\ -x\cdot(-1) &= 12\cdot(-1) && \mid T \\ +x &= -12 \end{aligned}$$

← Allgemein gilt: Bevor man mit Äquivalenzumformungen anfängt verkürzt man auf den jeweiligen Seiten erst die Terme. Hier: links die Minusklammer auflösen.

← Wir sind fast fertig, nur das Minus vor dem x muss noch weg. Da hilft ein Trick: man kehrt ein Vorzeichen um, indem man ·(−1) rechnet.

Bedenke jedoch dabei: ·(−1) muss bei der Äquivalenzumformung natürlich auf beiden Seiten der Gleichung gerechnet werden (siehe Zwischenschritt), damit die Gleichung „gleich" bleibt!

$\mathbb{L} = \{-12\}$

Probe: $-(x-3+15)=0$ [$x=-12$]
$-(-12-3+15)=0$
$-(0)=0$
$0=0$ ✓

Beispiel 7:

$3(-5+2x-7) = -42$ | T (Klammer sortieren

$3(-5-7+2x) = -42$ | T (Klammer zusammenfassen)

$3(-12+2x) = -42$ | T (Distributivgesetz)

$-36+6x = -42$ | $+36$

$6x = -6$ | $:6$ ← Mal zwischen 6 und x bindet stärker als das + vor der 6. Daher $:6$ anstelle -6. (Punkt vor Strich!)

$x = -1$

$\mathbb{L} = \{-1\}$ So kompliziert kann man -1 verstecken...!

Bisher kam stets nur eine Lösung in der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ vor. Aber es geht auch anders (sonst würde die Angabe einer Menge auch wenig Sinn machen):

Beispiel 8:

$x = x + 2$

Hinweis: gleiche Variable (hier: x) bedeutet gleiche versteckte Zahl!

Mit einem scharfen Blick sieht, dass eine beliebige Zahl nicht gleich die selbe Zahl +2 sein kann. Beweis:

$x = x+2$ | $-x$

$x-x = x+2-x$ | T

$0 = 2$ ↯ ← „Widerspruch"

Die Gleichung kann nicht stimmen, 0 ist nicht gleich 2 (das x ist komplett weggefallen) – keine Lösung!

Man schreibt: $\mathbb{L} = \{\}$, die sog. „Leere Menge".

Ein weiteres Beispiel für keine Lösung, also leere Menge, wäre:

Beispiel 9:

$x : 0 = 12$ ↯ Teilen durch Null ist verboten! $\mathbb{L} = \{\}$

Beispiel 10:

Auf der anderen Seite kann eine Gleichung aber auch mehrere Lösungen haben:

$x^2 = 25$ | T

Wir führen eine Termumformung durch, damit man es besser sieht:

$x \cdot x = 25$

Eine Zahl mit sich selbst multipliziert soll 25 ergeben.

$5 \cdot 5 = 25$

und mit scharfem Blick:

$-5 \cdot (-5) = 25$

Also: $\mathbb{L} = \{-5; 5\}$

kleinere Zahl zuerst (sortieren)

Man trennt mehrere Lösungen in $\mathbb{L}$ durch ein Semikolon („;").