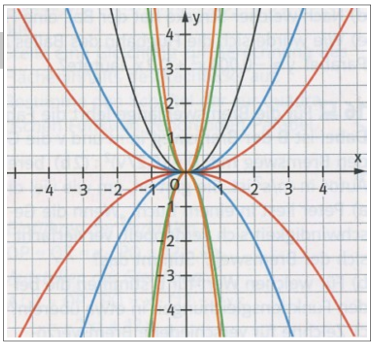
Quadratische Funktionen: Scheitelform und allgemeine Form

– Ergänzung zum Lehrbuch LS Mathematik 9 (G9 Hessen), Kap. VI.3 –



Wiederholung

Die Binomischen Formeln lauten:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Folgende Arten von quadratischen Funktionen kennen wir:

$f(x) = ax^2$	rein quadratische Funktion
$f(x) = a\,(x - d)^2 + e$	allgemeine quadratische Funktion (ab jetzt genannt: Scheitelform)

Bei letzterer kann man den Scheitelpunkt SP leicht ablesen:

SP (d | e)

Scheitelform

Gegeben sei der Funktionsterm $f(x) = 2\,(x - 1)^2 + 3$. Dabei handelt es sich um eine quadratische Funktion der Form $f(x) = a\,(x - d)^2 + e$, die im Vergleich zur Normalparabel

- um den Faktor $a = 2$ gestreckt ist,
- um eine Einheit nach rechts verschoben ist ($d = 1$) und
- um 3 Einheiten nach oben verschoben ist ($e = 3$).

Man bezeichnet die Form der obigen quadratischen Funktionsgleichung auch als **Scheitelform**. Das liegt daran, dass man hier leicht den Scheitelpunkt des dazugehörigen Funktionsgraphen ablesen kann, nämlich SP (d | e), hier also SP (1 | 3).

Merke

Einen Funktionsterm der Form $f(x) = a\,(x - d)^2 + e$ bezeichnet man als **Scheitelform**.

Allgemeine Form

Nun kann es aber vorkommen, dass ein Funktionsterm nicht in dieser für uns recht angenehmen Schreibweise gegeben ist, sondern in einer anderen. Stellen wir uns dafür vor, obiger Term würde ausmultipliziert:

$f(x) = 2\,(x - 1)^2 + 3$ | T: 2. Binomische Formel anwenden

$= 2 (x^2 – 2x + 1) + 3$ | T: Klammer ausmultiplizieren
$= 2x^2 – 4x + 2 + 3$ | T: zusammenfassen
$= 2x^2 – 4x + 5$

Der nun so umgeformte Funktionsterm hat die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$. Diese Form eines quadratischen Funktionsterms bezeichnet man als **allgemeine Form**. Man erhält sie aus der Scheitelform durch **Ausmultiplizieren**.

Merke

Einen Funktionsterm der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ bezeichnet man als **allgemeine Form**.

Quadratisches, lineares und absolutes Glied

Wie wir leicht erkennen können, bestehen die Terme quadratischer Funktionen, die in der allgemeinen Form gegeben sind, aus 3 Teilen, nämlich ax^2, bx und c. Man nennt diese Teile in der Mathematik **Glieder** (wie die einer Kette). Das erste Glied kennzeichnet sich insbesondere durch das „x^2“, aus diesem Grund nennt man es **quadratisches Glied**. Markant beim zweiten Glied ist das „x“ (wie bei einer linearen Funktion), daher heißt dieses **lineares Glied**. Der hintere Teil wird schließlich als **absolutes Glied** bezeichnet.

Merke

Die allgemeine Form eines quadratischen Funktionsterms besteht aus 3 **Gliedern**:

ax^2: **quadratisches** Glied bx: **lineares** Glied c: **absolutes** Glied

Gleichungen quadratischer Funktionen sind in der mathematischen Praxis häufig nicht in der Scheitelform, sondern in der allgemeinen Form gegeben. An diesen kann man zwar noch erkennen, wie die zugehörige Parabel gestreckt wurde (im Beispiel oben: a = 2) (Bonusinformation: Anhand von c kann man auch sehen, wo die Parabel die y-Achse schneidet, nämlich bei (0 | c).) Aber die wichtigste Information – wo der Scheitelpunkt liegt – kann man nicht mehr ablesen. Was kann man also tun, um in einem solchen Fall die Scheitelform zu erhalten, damit der Scheitelpunkt einfach abgelesen werden kann?

Quadratische Ergänzung

Die Antwort heißt: **quadratische Ergänzung**. Denn es lässt sich im umgekehrten Fall jede quadratische Funktion, die in der allgemeinen Form gegeben ist, mit Hilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelform umformen. Hierbei wird der Funktionsterm so ergänzt, dass eine **Binomische Formel** angewendet werden kann. Das wollen wir zunächst an einem einfachen Beispiel üben.

Aufgabe

Ergänze den in allgemeiner Form angegebenen Funktionsterm $f(x) = x^2 – 10x + \square$ so, dass man eine Binomische Formel anwenden kann.

Lösung

Man sieht schnell, dass der Term aufgrund seines Aufbaus wie die rechte Seite der 2. Binomischen Formel aussieht: $a^2 – 2ab + b^2$.

Damit wir bei den unterschiedlichen Buchstaben nicht durcheinander kommen, denken wir uns unseren Ausgangsterm anstelle mit „x“ nun mit „a“ geschrieben: $a^2 – 10a + \square$. Vergleicht man beide nun miteinander, so wird deutlich, dass im mittleren Teil (lineares Glied) 2b in der Binomischen Formel 10 in unserem Beispielterm entspricht (das „a“ gleicht sich aus, da bei beiden gegeben). Somit erhalten wir:

$2b = 10 \quad | : 2$
$b = 5$

Gemäß der Binomischen Formel wissen wir, dass hinten, also in unserem Beispielterm der mit „☐“ gesuchte Teil, b^2 entsprechen muss. Also rechnen wir mit 5^2:

$$
\begin{aligned}
& a^2 – 10a + \square && | \text{ für „☐“ (bzw. b²) 5² einsetzen} \\
= \; & a^2 – 10a + 5^2 && | \text{ T} \\
= \; & a^2 – 10a + 25
\end{aligned}
$$

Der jetzige Term entspricht einer gültigen rechten Seite der 2. Binomischen Formel. Nun können wir daraus ganz einfach die linke Seite der 2. Binomischen Formel erzeugen:

$$
\begin{aligned}
& a^2 – 10a + 25 \\
= \; & (a – 5)^2
\end{aligned}
$$

Damit hätten wir den ursprünglich in allgemeiner Form abgegebenen Funktionsterm $f(x) = x^2 – 10x + \square$ in die Scheitelform $f(x) = (x – 5)^2$ gebracht. Das Ablesen des Scheitelpunkts ist nun ein Kinderspiel: SP (d | e) = (5 | 0).

Dem aufmerksamen „Mitdenker“ ist womöglich etwas aufgefallen: Man bekommt den in der Aufgabe mit „☐“ gesuchten Teil heraus, indem man den konstanten Faktor des linearen Gliedes (hier: 10) durch 2 teilt und das Ergebnis quadriert:

$(10 : 2)^2 = 25$

Das Ergebnis muss dann nur noch für „☐“ eingesetzt werden, und schon kann man blitzschnell die Binomische Formel anwenden. Man nennt diese Rechnung („Faktor des linearen Gliedes durch 2 und das Ergebnis zum Quadrat“) die **quadratische Ergänzung**.

Merke

Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion kann in der **Scheitelform** $f(x) = a(x – d)^2 + e$ oder in der **allgemeinen Form** $f(x) = ax^2 + bx + c$ dargestellt werden.

Durch **Ausmultiplizieren** erhält man aus der Scheitelform die allgemeine Form.
Durch **quadratische Ergänzung** erhält man aus der allgemeinen Form die Scheitelform.

Für a = 1 in der allgemeinen Form gilt: Die quadratische Ergänzung entspricht der Rechnung **„Faktor des linearen Gliedes durch 2 und das Ergebnis zum Quadrat“**.

Ein komplexes Beispiel

Betrachten wir ein etwas komplexeres Beispiel. Zur Erinnerung: Der Funktionsterm ist in der allgemeinen Form angegeben und muss von uns mittels quadratischer Ergänzung in die Scheitelform umgeformt werden, damit wir den Scheitel leicht ablesen können.

Berechnung		Beschreibung
f(x) = $2x^2+9x+15$	| T	Im Vergleich zum obigen Beispiel sind hier 2 Dinge neu: (1) Das absolute Glied ist mit c = 15 vorgegeben (welchen Unterschied das zur vorigen Aufgabe macht, siehe nächster Schritt). (2) Im quadratischen Glied steht ein Faktor a ≠ +1, nämlich a = 2. Dieser muss aus den beiden vorderen Gliedern ausgeklammert werden, bevor man die quadratische Ergänzung anwendet.
= $2[x^2+\frac{9}{2}x]+15$	| + $(\frac{9}{2}:2)^2$	An dieser Stelle ist es sinnvoll eine eckige Klammer zu schreiben, damit man diesen Bereich später besser von der runden Klammer der Binomischen Formel unterscheiden kann. Nun wird es spannend: Wir wenden die quadratische Ergänzung an. Dazu nehmen wir vom Faktor des linearen Gliedes (hier: neun Halbe) die Hälfte und quadrieren das Ergebnis. Heraus kommt neun Viertel zum Quadrat. Diesen Wert addieren wir nun zum Term und ziehen ihn auch gleich wieder ab, damit wir den Funktionswert als Ganzes nicht verfälschen!
= $2[x^2+\frac{9}{2}x+(\frac{9}{4})^2-(\frac{9}{4})^2]+15$	| 1. BF	Ja, das sieht zunächst sehr umständlich und vermeintlich unsinnig aus, aber bringt uns nun einen entscheidenden Vorteil. Denn jetzt betrachten wir in der eckigen Klammer die ersten 3 Glieder. Diese stellen nun eine gültige rechte Seite der 1. Binomischen Formel dar. Machen wir daraus die linke Seite!
= $2[(x+\frac{9}{4})^2-(\frac{9}{4})^2]+15$	| T	Direkt hinter der geöffneten eckigen Klammer steht nun in neuen runden Klammern eine gültige linke Seite der 1. Binomischen Formel. Der Rest ist ein Kinderspiel: Term vereinfachen, indem zunächst neun Viertel in Klammern zum Quadrat ausgerechnet wird.
= $2[(x+\frac{9}{4})^2-\frac{81}{16}]+15$	| T	Das Ergebnis ist 81 Sechszehntel. Jetzt lösen wir die eckige Klammer auf, indem wir die führende 2 mit allen Teilen des Terms (außer 15, da diese ja nicht Teil der eckigen Klammer ist) verrechnen.
= $2(x+\frac{9}{4})^2-\frac{81}{8}+15$	| T	Nun sind wir fast fertig. Die 2 wird *nicht* weiter mit der runden Klammer der Binomischen Formel verrechnet (das wäre unsinnig, weil wir uns damit die Scheitelform wieder „zerstören“ würden). Statt dessen verrechnen wir die beiden hinteren absoluten Glieder.
= $2(x+\frac{9}{4})^2+\frac{39}{8}$		Fertig! ☺

Wie man sieht, hat der endgültige Funktionsterm die Scheitelform f(x) = a (x – d)^2 + e mit a = 2, d = $-\frac{9}{4}$ und e = $\frac{39}{8}$.

Der Scheitel der zu dieser Funktion gehörenden Parabel liegt also bei SP ($-\frac{9}{4}$ | $\frac{39}{8}$).