S. 52, Nr. 10

Um es auf die Spitze zu treiben und zu zeigen, was mathematisch möglich ist: Anstelle 4 Teilrechnungen die Erstellung 1 Formel, die weitestmöglich vereinfacht ist. Ziel: h berechnen nur mit der Angabe von a und b (vgl. Aufgabenstellung).

1. Um aus a und b c zu erhalten:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad | \sqrt{}$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. p berechnen: (Anm.: man könnte zuerst auch q berechnen)

$$a^2 = c \cdot p \quad | : c$$
$$p = \frac{a^2}{c}$$

3. q berechnen: (Anm.: Komplizierter ginge es auch mit dem anderen Kathetensatz)

$$c = p + q \quad | -p$$
$$q = c - p$$

4. h berechnen:

$$h^2 = p \cdot q \quad | \sqrt{}$$
$$h = \sqrt{pq}$$

Nun fügen wir die Teilrechnungen/-formeln von hinten (4.) nach vorne (1.) Schritt für Schritt in eine Formel zusammen.

$$h = \sqrt{pq} \qquad | \; q = c - p$$
$$h = \sqrt{p \cdot (c - p)} \qquad | \; p = \frac{a^2}{c}$$
$$h = \sqrt{\frac{a^2}{c} \cdot \left(c - \frac{a^2}{c}\right)} \qquad | \; c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$h = \sqrt{\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \left(\sqrt{a^2+b^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}$$

Hierbei handelt es sich um eine gültige Formel, die o.g. Anforderungen erfüllt. Doch sie ist komplex. Mit Hilfe diverser (uns bekannter!) mathem. Regeln lässt sie sich wie folgt vereinfachen:

$$h = \sqrt{\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \left(\sqrt{a^2+b^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)} \quad | \, T \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sqrt{a^2+b^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}} \quad | \, T \quad \text{(links kürzen, rechts multiplizieren)}$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{a^2+b^2}} \quad | \, T \quad \text{(gleichnamig machen)}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 \cdot (a^2+b^2)}{a^2+b^2} - \frac{a^4}{a^2+b^2}} \quad | \, T \quad \text{(links ausmultiplizieren)}$$

$$= \sqrt{\frac{a^4 + a^2b^2}{a^2+b^2} - \frac{a^4}{a^2+b^2}} \quad | \, T \quad \text{(Zusammenfassen)}$$

$$= \sqrt{\frac{a^4 + a^2b^2 - a^4}{a^2+b^2}} \quad | \, T \quad \text{(weiter vereinfachen)}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}} \quad | \, T \quad \text{(Wurzelgesetze)}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 \cdot b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad | \, T \quad \text{(Wurzelgesetze)}$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad | \, T \quad \text{(Erweitern, um Nenner rational zu machen)}$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad | \, T \quad \text{(Multiplizieren der Brüche)}$$

$$= \frac{ab \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$$

(streng genommen muss es $\frac{|a| \cdot |b| \cdot \sqrt{\ldots}}{\ldots}$ heißen)