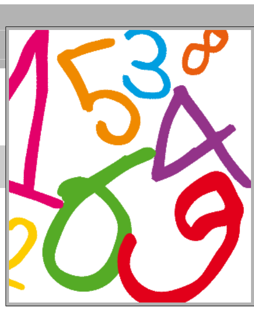
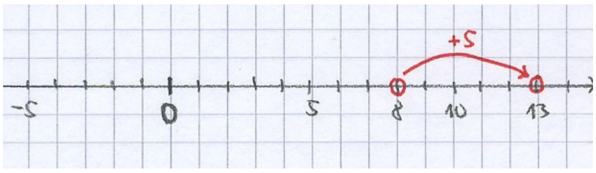
Rechnen mit rationalen Zahlen



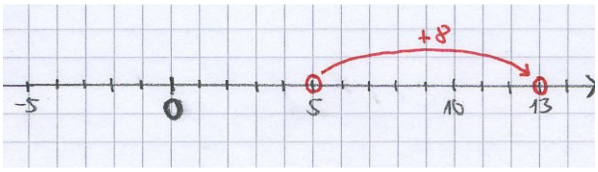
A) Einfaches Addieren und Subtrahieren

Folgende Additionsaufgaben sind sehr einfach:

8 + 5
= 13



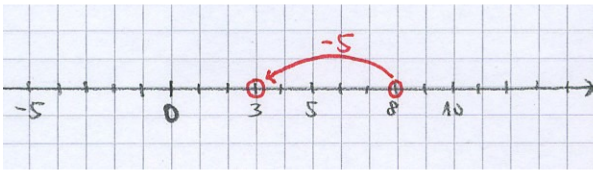
5 + 8
= 13



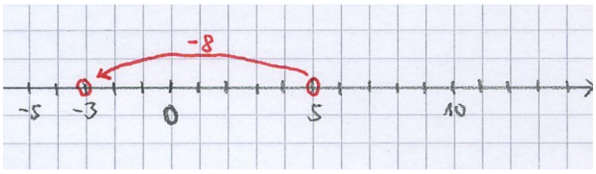
Merke:
Plus (+) rechnen bedeutet auf dem Zahlenstrahl nach **rechts** gehen.

Nicht wesentlich schwieriger sind diese Subtraktionsaufgaben:

8 – 5
= 3



5 – 8
= –3



Merke:
Minus (–) rechnen bedeutet auf dem Zahlenstrahl nach **links** gehen.

Weitere Beispiele:

1) $4 + 2 = 6$ 2) $-4 + 2 = -2$ 3) $4 - 2 = 2$ 4) $-4 - 2 = -6$

Doch was macht man, wenn die Aufgaben komplizierter werden und mehrere Rechenzeichen hintereinander stehen? Zum Beispiel: 5 + (+8) oder 5 + (–8)?

B) Addieren und Subtrahieren mit mehreren Rechenzeichen hintereinander

Letztlich ist das Plus- und Minusrechnen bei rationalen Zahlen nicht so schwer. Betrachten wir dazu folgende vier Kombinationsmöglichkeiten von Plus und Minus:

Beispiel: ***Plus*** *gefolgt von* ***Plus***

$8 + (+5) = 8 + 5 = 13$

$5 + (+8) = 5 + 8 = 13$

Anmerkung

• In der Mathematik ist es „unerwünscht“, dass zwei Rechenzeichen direkt hintereinander stehen. Deshalb schreibt man z. B. nicht 8+-5, sondern 8+(-5).

Beispiel: ***Minus*** *gefolgt von* ***Minus***

$8 - (-5) = 8 + 5 = 13$

$5 - (-8) = 5 + 8 = 13$

Merke:
Wenn zwei **gleiche Vorzeichen hintereinander stehen**, ergibt das immer **Plus (+)**.

Etwas anders verhält es sich für die zwei verbleibenden Kombinationsmöglichkeiten:

Beispiel: ***Plus*** *gefolgt von* ***Minus***

$8 + (-5) = 8 - 5 = 3$

$5 + (-8) = 5 - 8 = -3$

Beispiel: ***Minus*** *gefolgt von* ***Plus***

$8 - (+5) = 8 - 5 = 3$

$5 - (+8) = 5 - 8 = -3$

Merke:

Wenn zwei **unterschiedliche Vorzeichen hintereinander stehen**, ergibt das immer **Minus** (–).

Weitere Beispiele:

5) 4 + (+2)	6) –4 + (+2)	7) 4 – (–2)	8) –4 – (–2)
= 4 + 2	= –4 + 2	= 4 + 2	= –4 + 2
= 6	= –2	= 6	= –2
9) 4 + (–2)	10) –4 + (–2)	11) 4 – (+2)	12) –4 – (+2)
= 4 – 2	= –4 – 2	= 4 – 2	= –4 – 2
= 2	= –6	= 2	= –6

Gehen wir nun einen Schritt weiter. Wie sieht es aus, wenn Punktrechnung hinzu kommt?

C) Multiplizieren und Dividieren

Auch das Mal- und Durchrechnen von rationalen Zahlen ist kein Zauber, denn es gelten ähnliche Rechenregeln wie oben. Betrachten wir dazu wieder die vier Kombinationsmöglichkeiten von Plus und Minus:

Beispiel: ***Plus*** *mal/durch* ***Plus***

+8 • (+5)	+5 • (+8)
= +40	= +40
= 40	= 40

Beispiel: ***Minus*** *mal/durch* ***Minus***

–8 • (–5)	–5 • (–8)
= +40	= +40
= 40	= 40

Anmerkungen

- Das „+“ vor der führenden „8“ im ersten bzw. „5“ im zweiten Beispiel kann als „unsichtbares Plus“ auch entfallen.
- Für die Division gelten die Beispiele entsprechend.

Merke:

Wenn zwei **gleiche Vorzeichen durch ein Multiplikations- oder Divisionszeichen getrennt** werden, ergibt das immer **Plus** (+).

Wieder anders verhält es sich für die zwei verbleibenden Kombinationsmöglichkeiten:

Beispiel: ***Plus*** *mal/durch* ***Minus***

$+8 \cdot (-5)$	$+5 \cdot (-8)$
$= -40$	$= -40$

Beispiel: ***Minus*** *mal/durch* ***Plus***

$-8 \cdot (+5)$	$-5 \cdot (+8)$
$= -40$	$= -40$

Merke:
Wenn zwei **unterschiedliche Vorzeichen durch ein Multiplikations- oder Divisionszeichen getrennt** werden, ergibt das immer **Minus** (–).

Weitere Beispiele:

17) $+4 \cdot (+2)$
$= +8$
$= 8$

18) $+4 : (+2)$
$= +2$
$= 2$

19) $-4 \cdot (-2)$
$= +8$
$= 8$

20) $-4 : (-2)$
$= +2$
$= 2$

21) $+4 \cdot (-2)$
$= -8$

22) $+4 : (-2)$
$= -2$

23) $-4 \cdot (+2)$
$= -8$

24) $-4 : (+2)$
$= -2$

D) Und nun alles zusammen: komplexe Beispielaufgaben

Für folgende weiterführende Aufgaben müssen obige Regeln mitunter mehrfach angewendet oder sogar kombiniert werden. Es gilt:

1) Terme [= Rechenausdrücke] in Klammern zuerst ausrechnen,
2) Punkt- vor Strichrechnung beachten,
3) ansonsten von links nach rechts rechnen.

Außerdem sollte man Zwischenschritte machen, um den Überblick nicht zu verlieren. Die Verwendung von Termschreibweise ist selbstredend.

a) $-10 + (-5) - (-1) + 4$
$= -10 - 5 - (-1) + 4$
$= -10 - 5 + 1 + 4$
$= -10$

b) $5 \cdot (-2) \cdot 3$
$= -10 \cdot 3$
$= -30$

c) $-10 \cdot 5 \cdot (-2)$
$= -50 \cdot (-2)$
$= 100$

d) $3 \cdot (–5 + 8) \cdot 2$
$= 3 \cdot (3) \cdot 2$
$= 9 \cdot 2$
$= 18$

e) $–2 – (8 – 6) + 1$
$= –2 – (+2) + 1$
$= –2 –2 +1$
$= –4 +1$
$= –3$

f) $5 \cdot (–2) + (–6)$
$= –10 + (–6)$
$= –10 – 6$
$= –16$

Noch ein Wort zu einem häufig beobachteten Fehler:

Beachte, dass bei einer Aufgabe wie „–5 – 3“ das richtige Ergebnis **–8** lautet. Man könnte nämlich auf die Idee kommen, dass das Ergebnis positiv wäre, weil doch – verkürzt gesagt – Minus gefolgt von Minus Plus ergibt. Das ist aber falsch, denn diese Regel stimmt so nicht. Wenn wir oben nochmal genau nachlesen, sehen wir:

„Wenn zwei **gleiche Vorzeichen hintereinander stehen**, ergibt das immer **Plus (+)**.“

„Wenn zwei **gleiche Vorzeichen durch ein Multiplikations- oder Divisionszeichen getrennt** werden, ergibt das immer **Plus (+)**.“

Da steht zwar, dass bei gleichen Vorzeichen immer Plus herauskommt. Aber wir müssen auch auf das Fettgedruckte achten: Bei unserer Aufgabe „–5 – 3“ stehen weder zwei gleiche Vorzeichen hintereinander (zwischen den Minuszeichen steht eine 5!), noch sind beide Vorzeichen durch ein Multiplikations- oder Divisionszeichen voneinander getrennt. Beide Regeln treffen hier also nicht zu.
Außerdem ist doch klar: Wir haben 5 Euro Schulden (–5), und dann kommen 3 Euro Schulen hinzu (– 3). Minusrechnen bedeutet auf dem Zahlenstrahl immer nach links zu gehen. Also ergibt das noch mehr Schulden, nämlich –8 Euro.

E) Plus- und Minusklammern auflösen

Nachdem wir nun das „Grundwerkzeug“ des Plus-/Minus- und Mal-/Durchrechnens mit rationalen Zahlen beherrschen, können wir uns weiteren Termkonstrukten annehmen, insbesondere solchen mit größeren Klammern, vor denen eine Strichrechnung steht:

Beispiel: ***Plusklammer*** *(weil ein „**+**“ vor der Klammer steht)*

$4 + (2 + 5 – 3)$
$= 4 + 2 + 5 – 3$
$= 8$

Anmerkung
• Vor der ersten „2“ in der Klammer steht ein unsichtbares „+“.

Nebenbei: Vergleiche dazu den herkömmlichen Rechenweg:
$4 + (2 + 5 – 3) = 4 + (4) = 8$

$+ (2 + 5 - 3)$
$= +2 + 5 - 3$
$= 4$

Anmerkung

- Vor der ersten „2“ in der Klammer steht ein unsichtbares „+“.

Nebenbei: Vergleiche dazu den herkömmlichen Rechenweg:
$+ (2 + 5 - 3) = + (4) = 4$

Merke:

Wenn man eine **Plusklammer** auflöst, dann **bleiben die Vorzeichen der Zahlen in der Klammer gleich** (**Plus** bleibt **Plus**, **Minus** bleibt **Minus**).

Beispiel: ***Minusklammer*** *(weil ein „–“ vor der Klammer steht)*

$4 - (2 + 5 - 3)$
$= 4 - 2 - 5 + 3$
$= 0$

Anmerkung

- Vor der ersten „2“ in der Klammer steht ein unsichtbares „+“.

Nebenbei: Vergleiche dazu den herkömmlichen Rechenweg.
$4 - (2 + 5 - 3) = 4 - (4) = 0$

$- (2 + 5 - 3)$
$= -2 - 5 + 3$
$= -4$

Anmerkung

- Vor der ersten „2“ in der Klammer steht ein unsichtbares „+“.

Nebenbei: Vergleiche dazu den herkömmlichen Rechenweg.
$- (2 + 5 - 3) = - (4) = -4$

Merke:

Wenn man eine **Minusklammer** auflöst, dann **drehen sich die Vorzeichen der Zahlen in der Klammer herum** (**Plus** wird **Minus**, **Minus** wird **Plus**).

F) Distributivgesetz

Nach dem Umgang mit Plus- und Minusklammern bleibt noch die Frage, wie man Klammerterme handhabt, vor denen keine Strichrechnung, sondern eine Punktrechnung steht, insbesondere Mal. Das führt uns zum berühmt-berüchtigten Distributivgesetz.

Das Distributivgesetz kennt zwei „Richtungen“, in die man einen vorgegebenen Term jeweils hin überführen kann:

1. Richtung: ***Ausmultiplizieren*** *(umgekehrt zu Ausklammern, s. u.)*

$4 \cdot (2 + 5)$
$= 4 \cdot 2 + 4 \cdot 5$
$= 8 + 20$
$= 28$

$4 \cdot (2 - 5)$
$= 4 \cdot 2 - 4 \cdot 5$
$= 8 - 20$
$= -12$

$4 \cdot (-2 + 5)$
$= 4 \cdot (-2) + 4 \cdot 5$
$= -8 + 20$
$= 12$

$4 \cdot (-2 - 5)$
$= 4 \cdot (-2) - 4 \cdot 5$
$= -8 - 20$
$= -28$

$-4 \cdot (2 + 5)$
$= -4 \cdot 2 + (-4) \cdot 5$
$= -8 + (-20)$
$= -8 - 20$
$= -28$

$-4 \cdot (2 - 5)$
$= -4 \cdot 2 - (-4) \cdot 5$
$= -8 - (-20)$
$= -8 + 20$
$= 12$

$-4 \cdot (-2 + 5)$
$= -4 \cdot (-2) + (-4) \cdot 5$
$= 8 + (-20)$
$= 8 - 20$
$= -12$

$-4 \cdot (-2 - 5)$
$= -4 \cdot (-2) - (-4) \cdot 5$
$= 8 - (-20)$
$= 8 + 20$
$= 28$

Merke:

Eine Richtung des Distributivgesetzes ist das **Ausmultiplizieren** (das Gegenteil vom Ausklammern). Beim Ausmultiplizieren einer Klammer **verschwindet die Klammer** gemäß der folgenden Regel:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

2. Richtung: ***Ausklammern*** *(umgekehrt zu Ausmultiplizieren, s. o.)*

$4 \cdot 2 + 4 \cdot 5$
$= 4 \cdot (2 + 5)$
$= 4 \cdot 7$
$= 28$

$4 \cdot 2 - 4 \cdot 5$
$= 4 \cdot (2 - 5)$
$= 4 \cdot (-3)$
$= -12$

$4 \cdot (-2) + 4 \cdot 5$
$= 4 \cdot (-2 + 5)$
$= 4 \cdot 3$
$= 12$

$4 \cdot (-2) - 4 \cdot 5$
$= 4 \cdot (-2 - 5)$
$= 4 \cdot (-7)$
$= -28$

$-4 \cdot 2 + (-4) \cdot 5$
$= -4 \cdot (2 + 5)$
$= -4 \cdot 7$
$= -28$

$-4 \cdot 2 - (-4) \cdot 5$
$= -4 \cdot (2 - 5)$
$= -4 \cdot (-3)$
$= 12$

$-4 \cdot (-2) + (-4) \cdot 5$	$-4 \cdot (-2) - (-4) \cdot 5$
$= -4 \cdot (-2 + 5)$	$= -4 \cdot (-2 - 5)$
$= -4 \cdot 3$	$= -4 \cdot (-7)$
$= -12$	$= 28$

Merke:

Die andere Richtung des Distributivgesetzes ist das **Ausklammern** (das Gegenteil vom Ausmultiplizieren). Beim Ausklammern **wird eine Klammer gesetzt** gemäß der folgenden Regel:

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

Wie man sieht, funktionieren die Beispiele zum Ausklammern umgekehrt zu den Ausmultiplizieren-Beispielen oben.

Eine Anmerkung zum Abschluss:

Man könnte nun einwenden, dass die scheinbar komplizierten Regeln für Plus-/Minusklammern und das Distributivgesetz überflüssig seien, da man ja auch den herkömmlichen Rechenweg – zuerst innerhalb der Klammer ausrechnen – nutzen kann. Das mag für obige Beispiele sogar stimmen. Aber in Zukunft werden die Aufgaben komplizierter, und zwar in der Form, dass wir zunehmend mit Buchstaben rechnen werden. In diesem Fall ist man auf Regeln wie das Distributivgesetz angewiesen. Die Idee ist nun, die Regeln zu Plus-/Minusklammern und das Distributivgesetz jetzt schon kennenzulernen, wenn wir nur Terme betrachten, die ausschließlich aus Zahlen bestehen. So kann man die Regeln leichter nachvollziehen und verstehen, um sie später, wenn es mit Buchstaben in den Termen abstrakter wird, sicher anzuwenden.